

BIJLAGE I

Berekening v/h aantal bouwstenen enz. bij de ruimteverdeling door de vlakken v/e veelvlak ¹

Inleiding

We beperken ons tot de categorie veelvlakken waarvoor geldt:

- veelvlakken bestaande uit p paren van evenwijdige raakvlakken aan de ingeschreven bol;
- de onderlinge snijlijnen geven in elk vlak dezelfde *vlakverdeling*;
- niet alle snijlijnen hebben dezelfde richting (geen veelvlakken in de vorm van kokers).

Deze bijlage is niet van belang voor het volgen van de tekst in de voorafgaande hoofdstukken doch is uitsluitend bedoeld als een overigens moeizame verificatiemogelijkheid voor bepaalde in deel A of B genoemde aantallen. Op basis hiervan zijn bovendien in bijlage J in tabelvorm een aantal 'bijkomstige zaken' toegevoegd die mogelijk van belang zijn voor het 'aftasten' van verdere bijzonderheden.

Met betrekking tot ons onderwerp interesseert vooral :

het *twaaflvlak* ($p = 6$), het *twintigvlak* ($p = 10$) en het *ruitendertigvlak* ($p = 15$).

Het aantal 'bouwstenen' enz. is te vinden met behulp van de zojuist genoemde vlakverdeling en een tweetal relaties tussen het aantal \mathbb{H} (oekpunten), het aantal \mathbb{V} (lakken) en het aantal \mathbb{R} (ibben) van bouwstenen resp. groepen van bouwstenen, namelijk:

- bij één veelvlak: $\mathbb{H} + \mathbb{V} - \mathbb{R} = 2$ (Euler 1)

N.B.: blijkens het uitgangspunt gaan we voorbij aan bepaalde bijzondere vormen van veelvlakken, zoals bijvoorbeeld een 'veelvlak-torus', waarbij

$$\mathbb{H} + \mathbb{V} - \mathbb{R} = 0$$

- bij een cluster van L veelvlakken resp. bouwstenen:

$$\mathbb{H} + \mathbb{V} - \mathbb{R} = L + 1 \quad (\text{Euler 2}).$$

Als hulpmiddel bij de berekening gebruiken we een bol waarvan het middelpunt samenvalt met dat van de ingeschreven bol van het veelvlak en waarvan de straal groter is dan de afstand van het middelpunt tot het verst daarvan verwijderde snijpunt in de vlakverdelingen. De punten waar de snijlijnen de bol passeren, vormen op de bol de hoekpunten van een *plaatsvervangend veelvlak* en in de vlakverdelingen die van een *plaatsvervangende veelhoek*. Het komt er op neer dat we met deze kunstgreep de 'oneindige' bouwstenen vervangen door een overeenkomstig aantal eindige, die we echter nog wel als 'oneindig' zullen aanduiden. Voorts denken we ons bij elk vlakkenpaar een daaraan evenwijdig *middenvlak* door het middelpunt van het veelvlak; in totaal dus p middenvlakken.

De in de *vlakverdeling* aanwezige snijlijnen verdelen elkaar in lijnstukken, namelijk 2 'oneindig' grote - dat is dan vóór het aanbrengen van de hulpbol - met daartussen 1 of meer van eindige afmetingen. De snijlijnen zijn te onderscheiden in een aantal typen; s-1, s-2, s-3 enz., zie afb. 52, 56, en 60 waarin bovendien de *grensvlakken* tussen eindige en 'oneindige' bouwstenen zijn geaccentueerd. Wat betreft de afzonderlijke lijnstukken kunnen we in zo'n vlakverdeling van buiten naar binnen onderscheid maken in:

- lijnstukken tussen 'oneindige' delen onderling;
- „ „ „ „ en grensvlakdelen;
- „ „ „ „ en eindige (geen grensvlak-)delen;
- „ „ „ „ grensvlakdelen onderling;
- „ „ „ „ eindige (geen grensvlak-) en grensvlakdelen;
- „ „ „ „ eindige (geen grensvlak-)delen onderling.

¹ Zie noot 1 op p. 151.

H, V en R voorzien we zonedig van een overeenkomstige specificatie, namelijk:

- e : van alle eindige bouwstenen;
 o : van alle 'oneindige' bouwstenen;
 eo : in het grensvlak van eindige en 'oneindige' bouwstenen; dat betreft van de kluster van eindige bouwstenen het nog van buitenaf zichtbare en van de kluster van 'oneindige' bouwstenen het nog van binnenuit zichtbare;
 ee : van uitsluitend eindige bouwstenen, met andere woorden wat van de kluster van deze bouwstenen niet meer van buitenaf zichtbaar is;
 oo : van uitsluitend 'oneindige' bouwstenen, met andere woorden wat van de kluster van deze bouwstenen niet meer van binnen zichtbaar is;
 ooe : van uitsluitend 'oneindige' bouwstenen doch nog in aanraking met het grensvlak;
 ooo : van uitsluitend 'oneindige' bouwstenen doch zonder enige aanraking met het grensvlak;
 ' : waar een accent is toegevoegd betreft dit dezelfde selectie, doch met de denkbeeldige eigenschap dat de bouwstenen net iets van elkaar gescheiden zijn. Zo betreft bijvoorbeeld He' het totaal aantal hoekpunten van de *afzonderlijke* eindige bouwstenen.
 N.B. : waar hier van 'oneindige' bouwstenen wordt gesproken, zijn steeds bedoeld de (oorspronkelijk) 'oneindige' bouwstenen, zoals die bestonden vóór het creëren van het *plaatsvervangend veelvlak*. -

De 'oneindige' bouwstenen zijn te onderscheiden in
 St(aven), Sc(hijven) en Pi(ramiden),
 met resp. 1, 2 en 3 'oneindige' dimensies (zie afb. 35 op p. 87).
 Aantallen bouwstenen duiden we aan met de letter N;

zo is No het aantal 'oneindige' bouwstenen en daarvan betreft NoSt alleen de Staven.

De vlakverdeling maakt de volgende tellingen mogelijk (zie ook tabel II in bijlage J):

- V₀₁: aantal richtingen waarin een groep van (n-1) evenwijdige snijlijnpaaren voorkomen; n is het aantal bij elk van die richtingen betrokken vlakkenpaaren, inclusief dat van het vlak van tekening; $V_{01} \leq (p-1)$;
 V₀₂: aantal lijnstukken tussen 'oneindige' delen van de vlakverdeling; $V_{02} = 4(p-1) = V_{10}$;
 V₀₃: aantal lijnstukken tussen 'oneindige' delen en grensvlakdelen; $V_{03} \leq 2(p-1)$;
 V₀₄: aantal lijnstukken tussen 'oneindige' delen en eindige (niet grensvlak)delen. Zie ook V₀₇;
 V₀₅: aantal lijnstukken tussen eindige (niet grensvlak)delen; in de kluster van eindige bouwstenen zijn die van buitenaf niet zichtbaar;
 V₀₆: aantal lijnstukken tussen eindige delen en grensvlakdelen;
 V₀₇: aantal lijnstukken tussen grensvlakdelen onderling. - N.B.:
 - in de kluster van eindige bouwstenen zijn V₀₃, V₀₄, V₀₆ en V₀₇ van buitenaf zichtbaar;
 - $V_{04} = V_{07}$; beide verzamelingen betreffen de lijnstukken (excl. V₀₃) tussen eindige en 'oneindige' bouwsteenvlakken, de één a/d rand v/d vlakverdeling, de ander daarbinnen;
 V₀₈: aantal snijpunten in de vlakverdeling, elk van (n-1) snijlijnen;
 V₀₉: id., voor zover uitsluitend aanwezig in de verzameling V₀₅;
 V₁₀: aantal 'oneindige' delen van de vlakverdeling; $V_{10} = V_{02}$;
 V₁₁: aantal grensvlakdelen;
 V₁₂: aantal eindige delen (niet grensvlakdelen).

Onder A01-A39 zijn een aantal grootheden berekend.¹ Als hulpmiddel diende het merendeel van wat onder B01-B25 wordt vermeld en eveneens een deel van de onder C01-C40 weergegeven onderlinge betrekkingen. Eventuele verwijzingen, zowel bij A, B als C, zijn in een afzonderlijk kolom geplaatst en betreffen veelal aanwijzingen voor de bewijsvoering.

A01: aantal vlakken dat de ruimte in bouwstenen verdeeld = $2p$	Per definitie
A02: $N_e = 2p \cdot \sum(n^1 \cdot V_{08}) + 2p \cdot (V_{11} + V_{12}) - p \cdot (V_{03} \text{ t/m } V_{07}) - 1$	C02, resp. A13+A20-A27-1
A03: $N_o = 2+4p \cdot (p-1) = 2 \text{ Horus}(p)$	C27 en C08, resp. 2+A32-A18
N.B.: de verbinding van het eindige met het 'Oneindige' komt in deze 'omgeving' tot uitdrukking in <i>Horus-getallen</i> ; de elders gebruikte afkorting 'Ho' is hier vermeden om verwarring te vermijden met het totaal aantal hoekpunten van de (oorspronkelijk) 'oneindige' bouwstenen. Bij B06 zal blijken dat de ordening van de Staven rond de snijlijnen van de middenvlakken tot uitdrukking komt in <i>Isisgetallen</i> . Zie ook onder 14.03 op p. 91. -	
No wordt onderverdeeld in:	
--- A04: $N_oSt = 2p \cdot \sum\{(2(n-1)^2 - 1) \cdot n^1 \cdot V_{01}\} =$ $= 2p \cdot \sum\{[Isis(n-1)] \cdot n^1 \cdot V_{01}\}$. Ook geldt ,, $= 4p \cdot (p-1) - 4p \cdot \sum(V_{01}) + 2p \cdot \sum(n^1 \cdot V_{01})$	$\sum(B06.B04)$ A03-A05-A06; C26 & B01
--- A05: $N_oSc = 2p \cdot \sum(V_{01})$	p.B18, resp 2 ¹ .B21
--- A06: $N_oPi = 2p \cdot \sum(V_{01}) - 2p \cdot \sum(n^1 \cdot V_{01}) + 2$	A05-B07+2; C09
In de <i>samengevoegde</i> staat van de bouwstenen in het plaatsvervangend veelvlak geldt:	
A07: $H = 2p \cdot \sum(n^1 \cdot V_{08}) + 4p \cdot (p-1)$	A13+A17; C11; C14
A08: $V = 2p \cdot (V_{10} + V_{11} + V_{12}) + 2 + 4p \cdot (p-1)$	2p.B24+A25
A09: $R = p \cdot (V_{02} \text{ t/m } V_{07}) + 8p \cdot (p-1)$	p.B08+A32
In de <i>contactloze</i> staat van de bouwstenen in het plaatsvervangend veelvlak geldt:	
A10: $H' = 2p \cdot \sum\{(2+n(n-1)) \cdot n^1 \cdot V_{08}\} + 16p \cdot (p-1)$	$\sum(B22.B23) + 2.A32$
A11: $V' = 4p \cdot (V_{10} + V_{11} + V_{12}) + 2 + 4p \cdot (p-1)$	2.A08-A25
A12: $R' = 4p \cdot (V_{02} \text{ t/m } V_{07}) + 16p \cdot (p-1)$	4.A09-2.A32
Voorts is:	
A13: $H_e = 2p \cdot \sum(n^1 \cdot V_{08})$	$\sum(B22)$
A14: $H_{ee} = 2p \cdot \sum(n^1 \cdot V_{08}) - 2 - p \cdot (V_{03} + V_{04} + V_{06} + V_{07} - 2V_{11})$	A13-A15; C14
A15: $H_{eo} = 2 + p \cdot (V_{03} + V_{04} + V_{06} + V_{07} - 2V_{11})$	2+A29-A22; C07
A16: $H_o = 4p \cdot (p-1) + 2 + p \cdot (V_{03} + V_{04} + V_{06} + V_{07} - 2V_{11})$	A17+A15; C17
A17: $H_{oo} = 4p \cdot (p-1)$	2.B02
A18: $H_{ooo} = 4p \cdot (p-1)$	A17; C20
A19: $H_{ooe} = 0$	Per definitie
A20: $V_e = 2p \cdot (V_{11} + V_{12})$	„ „
A21: $V_{ee} = 2p \cdot V_{12}$	„ „
A22: $V_{eo} = 2p \cdot V_{11}$	„ „
A23: $V_o = 2p \cdot V_{11} + 2 + 12p \cdot (p-1)$	A22+A24; C18
A24: $V_{oo} = 2 + 12p \cdot (p-1)$	A25+A26; C21
A25: $V_{ooo} = 2 + 4p \cdot (p-1) = 2 \text{ Horus}(p)$	2+A32-A18; C08

¹ Zie noot 1 op p. 151.

A26: Vo _{oe} = 8p.(p-1)	C28
A27: Re = p.(V ₀₃ t/m V ₀₇)	A28+A29; C16
A28: Re _e = p.V ₀₅	B11; C38
A29: Re _o = p.(V ₀₃ +V ₀₄ +V ₀₆ +V ₀₇)	B12; C34
A30: Ro = p.(V ₀₃ +V ₀₄ +V ₀₆ +V ₀₇) + 12p.(p-1)	A29 + A31; C19
A31: Roo = 12p.(p-1)	A32 + A33; C22
A32: Roo _o = 8p.(p-1)	2p.B18
A33: Roo _e = 4p.(p-1)	B10 en C37; A17 en C33
A34: H'e = 4p.Σ(n ¹ .V ₀₈) - 2 - p.(V ₀₃ -2V ₀₅ -V ₀₆ -2V ₁₁)	2A02-A36+A38; C05 resp. A10-A35; C23 & C39
A35: H'o = 20p.(p-1) + 2 + p.(3V ₀₃ +2V ₀₄ +V ₀₆ +2V ₀₇ - 2V ₁₁)	2A03-A37+A39; C06
A36: V'e = 2p.(V ₁₁ +2V ₁₂)	2A20 - A22; C24
A37: V'o = 2p.(2V ₁₀ +V ₁₁) + 2 + 4p.(p-1)	A11 - A36; C24
A38: R'e = p.(V ₀₃ +2V ₀₄ +4V ₀₅ +3V ₀₆ + 2V ₀₇)	4B11+3B13+2B14+B15
A39: R'o = 16p.(p-1) + p.(4V ₀₂ +3V ₀₃ +2V ₀₄ +V ₀₆ + 2V ₀₇)	A12-A38; C25

Het voorgaande is gebaseerd op één of meer van onderstaande betrekkingen:

B01: aantal snijlijnen in een vlakverdeling	= (p-1)
B02: aantal snijlijnen in de ruimte	= 2p.(p-1)
B03: aantal richtingen van de snijlijnen in een vlakverdeling, tevens aantal snijlijnen van middenvlakken in een middenvlak	= Σ(V ₀₁); C36
B04: totaal aantal snijlijnen van elk n middenvlakken	= p.n ¹ .V ₀₁
B05: totaal aantal snijlijnen van middenvlakken	= p.Σ(n ¹ .V ₀₁)
B06: aantal Staven in één bundel rond een snijlijn van n middenvlakken N.B.: dit betreft de reeks 1, 7, 17, 31 enz., dat wil zeggen 'Isis-getallen', zie ook onder 14.03, p. 91. De reeks ontstaat als oppervlak-verdeling indien men de zijden van een regelmatige 2n-hoek verlengt.	= 2(n-1) ² -1
B07: aantal bundels van 1 of meer Staven	= 2p.Σ(n ¹ .V ₀₁); 2B05
B08: aantal lijnstukken in de vlakverdeling, excl. de 'koorden'	= (V ₀₂ t/m V ₀₇)
B09: aantal lijnstukken in de ruimte, dat wil zeggen in de samengestelde vlakverdelingen, excl. de 'koorden'	= p.(V ₀₂ t/m V ₀₇)
Onderverdeeld in	
--- B10: uitsluitend behorende bij 4 'oneindige' bouwstenen	= 4p.(p-1); 2.B02, resp. 2p.V ₀₂
--- B11: uitsluitend behorende bij 4 eindige bouwstenen	= p.V ₀₅
--- B12: bij 'oneindige' zowel als eindige bwstn., 4 in totaal	= p.(V ₀₃ +V ₀₄ +V ₀₆ +V ₀₇)
Onderverdeeld in:	
--- B13: 3 eindige en 1 'oneindige'	= p.V ₀₆ ; B12 - B14 - B15
--- B14: 2 eindige en 2 'oneindige'	= p.(V ₀₄ +V ₀₇)
--- B15: 1 eindige en 3 'oneindige'	= p.V ₀₃
N.B.: Betreft de laatste eindige lijnstukken in de begrenzing van de Staven.	
B16: aantal 'koorden' in de <i>cirkel</i> waarbinnen alle snijpunten van de vlakverdeling liggen	= 4(p-1)
Onderverdeeld in:	

- B17: Aantal dat bij een grotere cirkel niet van lengte
verandert, namelijk bij Staven en Schijven = $V_{02} - 2\sum(V_{01})$
- B18: aantal dat van lengte verandert, namelijk
bij Piramiden en Schijven = $2\sum(V_{01})$
- B19: aantal 'koorden' in de *bol* waarbinnen alle snijpunten liggen = $8p \cdot (p-1)$; $2p \cdot B18$
Onderverdeeld in:
- B20: aantal met constante lengte = $2p \cdot V_{02} - 4p \cdot \sum(V_{01})$; $2p \cdot B17$
- B21: aantal waarbij de lengte verandert = $4p \cdot \sum(V_{01})$; $2p \cdot B18$
- B22: aantal punten in de ruimte met elk
(n-1) snijlijnen in de vlakverdeling = $2p \cdot n^1 \cdot V_{08}$
- B23: aantal bouwstenen waar zo'n punt deel van uitmaakt = $2 + n(n-1)$
N.B.: n vlakken door één punt, met niet meer dan 2
vlakken per snijlijn, bepalen op een bol om dat punt
de hoekpunten van een veelvlak. Het aantal snijlijnen
is $2^1 \cdot n(n-1)$, het aantal hoekpunten dus $n(n-1)$, het
aantal 'koorden' $2n(n-1)$. Euler 1 - zie p. 146 - geeft
ons dan het aantal vlakken en daarmee het onder B23
bedoelde aantal bouwstenen.
- B24: aantal bouwsteenvlakken in de vlakverdeling = $V_{10} + V_{11} + V_{12}$
- B25: aantal hoekpunten van eindige bwstn. i/d vlakverdeling = $\sum(V_{08}) = (V_{02} \text{ t/m } V_{07}) -$
N.B.: voor een kluster van veelhoeken geldt $(V_{10} + V_{11} + V_{12}) + 1$;
namelijk dat $H(vh) + V(vh) - R(vh) = 1$. $B08 - B24 + 1$

Euler 1 en 2 - zie p. 146 - leveren nog de volgende betrekkingen:

- C01: H +V -R = 1+Ne +No - betreft alle bouwstenen in het
A07 +A08 -A09 = 1+A02+A03 plaatsvervangend veelvlak
- C02: He +Ve -Re = 1+Ne - betreft alle eindige
A13 +A20 -A27 = 1+A02 bouwstenen
- C03: Ho +Vo -Ro = 2+No - betreft alle 'oneindige' bwst. +
A16 +A23 -A30 = 2+A03 het veelvlak van de eindige,
dat wil zeggen het 'grensvlak'
- C04: H' +V' -R' = 2Ne+2No - collectieve toepassing op de
A10 +A11 -A12 = 2A02+2A03 afzonderlijke bouwstenen
- C05: H'e +V'e -R'e = 2Ne - idem, doch uitsluitend op de
A34 +A36 -A38 = 2A02 eindige
- C06: H'o +V'o -R'o = 2No - idem, doch uitsluitend op de
A35 +A37 -A39 = 2A03 'oneindige'
- C07: Heo +Veo -Reo = 2 - betreft het grensvlak als
A15 +A22 -A29 = 2 veelvlak'
- C08: Hooo+Vooo-Rooo = 2 - betreft het plaatsvervangend
A18 +A25 -A32 = 2 veelvlak'
- C09: aantal bundels van Staven ... - idem, indien bepaald door
..... +NoPi-NoSc = 2 de middenvlakken
B07 +A06 -A05 = 2
- C10: Hee +Vee -Ree = Ne -1 - combinatie van C04, C05,
A14 +A21 -A28 = A02-1 C06, C17 en C22.

Verder geldt uiteraard:

C11: A07 = A14+A15+A17	resp. H	= Hee +Heo Hoo
C12: A08 = A21+A22+A24	„ V	= Vee +Veo +Voo
C13: A09 = A28+A29+A31	„ R	= Ree +Reo +Roo
C14: A13 = A14+A15	„ He	= Hee +Heo
C15: A20 = A21+A22	„ Ve	= Vee +Veo
C16: A27 = A28+A29	„ Re	= Ree +Reo
C17: A16 = A17+A15	„ Ho	= Hoo +Heo
C18: A23 = A24+A22	„ Vo	= Voo +Veo
C19: A30 = A31+A29	„ Ro	= Roo +Reo
C20: A17 = A18	„ Hoo	= Hooo
C21: A24 = A25+A26	„ Voo	= Vooo+Voee
C22: A31 = A32+A33	„ Roo	= Rooo+Roee
C23: A10 = A34+A35	„ H'	= H'e +H'o
C24: A11 = A36+A37	„ V'	= V'e +V'o = (2Ve-Vo)+V'o
C25: A12 = A38+A39	„ R'	= R'e +R'o
C26: A03 = A04+A05+A06	„ No	= NoSt +NoSc +NoPi
C27: A25 = A03	„ Vooo=	No
C28: A32 = A26	„ Rooo=	Voee
C29: A32 = B19	„ Rooo=	aantal 'koorden' in de omringende bol
C30: B19 = B20+B21	„	aantal 'koorden' in de omringende bol(len) = aantal 'koorden' van constante lengte (tussen St en Sc) + aantal van variabele lengte (tussen Pi en Sc).
C31: A05 = 2 ⁻¹ .B21	„ NoSc = 2 ⁻¹ .	aantal 'koorden' tussen Pi en Sc.
C32: B18 = V02	„	aantal 'koorden' in de cirkel die alle snijpunten in de vlakverdeling omvat = V02
C33: A17 = A33	„ Hoo =	Hoee
C34: A29 = B12 = B13+B14+B15	„ Reo =	aantal lijnstukken in de ruimte dat resp. behoort tot de 3+1, 2+2, en 1+3 eindige + 'oneindige' bouwstenen
C35: A27 = B09- A33	„ Re =	aantal lijnstukken (ribben excl. 'koorden') in de verdeling van de ruimte - Rooe
C36: B04 = B03	„	aantal snijlijnen in een middenvlak met middenvlakken = aantal richtingen van de snijlijnen in een vlakverdeling
En tenslotte:		
C37: B10 = A33	„	aantal lijnstukken dat uitsluitend deel uitmaakt van 4 'oneindige' bouwstenen = Rooe
C38: B11 A28	„ Id. van 4	eindige bouwstenen = Ree
C39: $\sum\{(n-1)V_{08}\} + 2(p-1) = (V_{02} \text{ t/m } V_{07})$;		betreft 2 uitdrukkingen voor het aantal lijnstukken in een vlakverdeling
C40: $\sum(V_{08}) + V_{11} + V_{12} - (V_{03} \text{ t/m } V_{07}) = 1$;		geldt voor de (eindige) veelhoekenkluster in de vlakverdeling.

-o-

Zie bijlage J voor enkele
in tabelvorm opgenomen toepassingen van het bovenstaande.¹

-o-

¹ De wijze waarop we tot de onder A, B en C vermelde betrekkingen zijn gekomen heeft tot gevolg dat hun totaliteit misschien meer zal zijn dan voor een strikte bewijsvoering noodzakelijk is.